数理解析研究所講究録
第1634巻2009年49-54

CAT(0) 空間と ASYMPTOTIC 次元

知念 直紹 (NAOTSUGU CHINEN)
(沖縄工業高等専門学校)
(OKINAWA NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY)

保坂哲也 (TETSUYA HOSAKA)
(宇都宮大学教育学部)
(DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF EDUCATION, UTSUNOMIYA UNIVERSITY)

1. 序章

本稿で使用される記号と用語は [11] と [12] に従う．$\mathbb{N}$ を自然数全体，$\mathbb{R}$ を実数全体, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ とし，距離空間 (X, d) の部分空間 Y の部分距離を $d|_Y$ とする．

任意の有界閉集合がコンパクトであるような距離空間をプロパーな距離空間という．本稿における研究対象の空間はコンパクトでないプロパーな距離空間とし，コンパクトでないプロパーな距離空間の大域的な位相的あるいは幾何的性質を調べることを目標とする (cf. [6], [17]).

asympototic 次元は Gromov が [13] において大域的な次元として定義した．

Definition 1.1 (asymptotic 次元). (X, d) を距離空間とする．$\operatorname{asdim}(X, d) \leq n$ とは，任意の $r > 0$ に対して X の被覆 $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_n$ と $R > 0$ が存在して以下を満たす．

(1) 任意の $U \in \mathcal{U}$ に対して，$\operatorname{diam} U < R$.

(2) 任意の $i = 0, \ldots, n$ に対し、相異なる $U, U' \in \mathcal{U}_i$ に対して，$d(U, U') > r$.

$\operatorname{asdim}(X, d) \leq n$ で $\operatorname{asdim}(X, d) \not\leq n-1$ のときに $\operatorname{asdim}(X, d) = n$ とする．

特に，G を有限生成群とし，その Cayley グラフを $\operatorname{Cay}(G)$ (Cayley グラフに関しては [2] を参照されたい)，そこでの道の長さから導かれる距離を d とするとき，$\operatorname{asdim} G = \operatorname{asdim}(\operatorname{Cay}(G), d)$ と定める．Cayley グラフは生成元に依存するが，asymptotic 次元の決め方は G の生成元に依存しないことが知られている．

Remark 1.2. asymptotic 次元に関して次の基本的な結果が知られている (cf. [1]).

(1) $\operatorname{asdim}(\mathbb{R}^n, d_n) = n$.

(2) $Y \subset X$ に対して，$\operatorname{asdim}(Y, d|_Y) \leq \operatorname{asdim}(X, d)$.

(3) ある $r > 0$ に対して Y が (X, d) の中で r-稠密ならば，$\operatorname{asdim}(Y, d|_Y) = \operatorname{asdim}(X, d)$.

(4) $\operatorname{asdim}(X \times Y, d_X + d_Y) \leq \operatorname{asdim}(X, d_X) + \operatorname{asdim}(Y, d_Y)$.

asymptotic 次元を研究する動機は以下の結果による．

Theorem 1.3 ([21]). Γを幾何学的有限群で $\mathrm{asdim}\,\Gamma < \infty$ とする．このとき，基本群がΓである多様体に関して *Novikov*予想と *Gromov-Lawson*予想が成立する．

この結果から，asymptotic 次元の有限性と Novikov 予想および Gromov-Lawson 予想は深い関係があることがわかる．asymptotic 次元は近年 Dranishnikov を中心に盛んに研究がなされている ([1] を参照).

Definition 1.4 (CAT(0) 空間 (cf.[3])). (X,d) を距離空間とする．

(1) (X,d)が**geodesic space**であるとは，任意のx, $y \in X$ に対して等長な埋め込み$\xi : [0,d(x,y)] \to X$ が存在することである．$\xi([0,d(x,y)])$ を $[x,y]_X$ と表すことにする．

(2) (X,d) を geodesic space，x, y, $z \in X$，$T = [x,y]_X \cup [y,z]_X \cup [z,x]_X$ とする．このとき，$d(x,y) = d_{\mathbb{R}^2}(\overline{x},\overline{y})$，$d(y,z) = d_{\mathbb{R}^2}(\overline{y},\overline{z})$，$d(z,x) = d_{\mathbb{R}^2}(\overline{z},\overline{x})$ を満たす$\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z} \in \mathbb{R}^2$ が存在する．$\overline{T} = [\overline{x},\overline{y}]_{\mathbb{R}^2} \cup [\overline{y},\overline{z}]_{\mathbb{R}^2} \cup [\overline{z},\overline{x}]_{\mathbb{R}^2}$ をTの比較三角形という．このとき，$z \in T$ に対して$\overline{z} \in \overline{T}$が一意的に対応する．例えば，$z \in [x,y]_X$ に対して$d(x,z) = d_{\mathbb{R}^2}(\overline{x},\overline{z})$ を満たす$\overline{z} \in [\overline{x},\overline{y}]_{\mathbb{R}^2}$ が一意的に存在する．

(3) (X,d) が**CAT(0)** 空間とは，任意の三角形$T \subset X$ と $z, z' \in T$ に対して，比較三角形$\overline{T} \subset \mathbb{R}^2$ の中の対応する$\overline{z}, \overline{z'}$が

$$d(z,z') \leq d_{\mathbb{R}^2}(\overline{z},\overline{z'})$$

を満たす．

Definition 1.5 (CAT(0) 群). Gを有限生成群とする．

(1) Gが距離空間(X,d)に幾何的に作用するとは，
  (a) Gは等長的に作用する．
  (b) 任意の$r \geq 0$と$x \in X$に対して，$\{g \in G \,|\, d(x,gx) \leq r\}$は有限．
  (c) コンパクト集合$K \subset X$が存在して，$X = \bigcup_{g \in G} gK$を満たす．

を満たすときにいう．

(2) Gが**CAT(0)** 群とは，Gが幾何的に作用する CAT(0) 空間(X,d)が存在することである．

有限生成群 G が距離空間 (X,d) に幾何的に作用するならば，$\mathrm{asdim}\,G = \mathrm{asdim}(X,d)$ が知られている．

様々な群の asymptotic 次元の計算がなされているが代表的な結果を述べておく．詳しいことは [1] を参照されたい．

Theorem 1.6 ([9], [17]). Gを有限生成群とし，距離空間(X,d)に幾何的に作用しているとする．このとき，

(1) G が *Coxeter* 群（*Coxeter* 群については [5] を参照されたい）ならば，$\mathrm{asdim}(X,d) < \infty$．すなわち，$\mathrm{asdim}\,G < \infty$ ([9])．

(2) 距離空間(X,d)が（*Gromov*の意味で）双曲空間（双曲空間については[15]を参照されたい）ならば，$\mathrm{asdim}(X,d) < \infty$．すなわち，$\mathrm{asdim}\,G < \infty$ ([17])．

Theorem 1.7 ([19]). G を有限生成群とし，CAT(0) 空間 (X,d) に幾何的に作用しているとする．このとき，X の理想境界 ∂X（理想境界については [3] を，また群の境界については [15] を参照されたい）は有限次元をもつ．すなわち，$\dim \partial G < \infty$.

以上の２つの結果から，以下のような問題が考えられる．

Question 1.8 ([7],[14]). *Does every* CAT(0) *group have finite asymptotic dimension?*

上述の問題を CAT(0) 空間に着目し，群作用を仮定しない代わりに空間に条件をつけることにより以下のような問題が提起される．

Question 1.9. *Does every* CAT(0) *manifold have finite asymptotic dimension?*

CAT(0) 空間は AR より，CAT(0) 多様体は可縮なので，さらに限定すると以下のような問題が考えられる．

Question 1.10. *Does every* CAT(0) *space which is homeomorphic to* $\mathbb{R}^n$ *have finite asymptotic dimension?*

Question 1.9 と 1.10 は群作用を仮定していない，あるいは，$n=1,2$ のとき Question 1.9 と 1.10 は同じことであることに注意する．また，Question 1.10 の $n=1$ のときは asymptotic 次元は 1 になることにも注意する．

以上を踏まえて本研究の目的は Question 1.10 の $n=2$ のときに得られた結果を述べる．この結果は Question 1.8，あるいは Question 1.9 を解決する上での最初のきっかけとなりえるであろう．

2. 境界に関して

Notation 2.1. (X,d) を距離空間，$x \in X$，$r \geq 0$ とする．

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$$
$$S(x,r) = \{y \in X : d(x,y) = r\}$$

とする．

(X,d) を CAT(0) 空間とする．このとき，すべての $B(x,r)$ と $B(x,r) \setminus S(x,r)$ は x に可縮であり，さらに $B(x,r)$ と $B(x,r) \setminus S(x,r)$ は AR ということがわかる．また，$B(x,r)$ は $B(x,r) \setminus S(x,r)$ のコンパクト化（剰余は $S(x,r)$）とみなすことができる．

$S(x,r)$ がサークル $\mathbb{S}^1$ の特徴づけを持つことを示すことにより以下のことが証明できる．詳しい証明は [4] を参照されたい．

Theorem 2.2. *Let* (X,d) *be a proper* CAT(0) *space which is homeomorphic to* $\mathbb{R}^2$. *Then,* $S(x,r)$ *is homeomorphic to* $\mathbb{S}^1$ *for all* $x \in X$ *and all* $r > 0$.

Remark 2.3. (X,d) を proper CAT(0) 空間, $x \in X$, $k \in \mathbb{N}$ とする. $[x,z]_X \subset B(x,k+1)$ に対して $p_k([x,z]_X) \subset [x,z]_X$, $p_k(S(x,k+1)) = S(x,k)$, $p_k|_{B(x,k)} = id$ を満たすような自然な写像 $p_k : B(x,k+1) \to B(x,k)$ が存在する.

$X \cup \partial X$ は X のコンパクト化で,

$$X \cup \partial X \cong \varprojlim\{B(x,k), p_{k-1}\}$$
$$\partial X \cong \varprojlim\{S(x,k), p_{k-1}|_{S(x,k)}\}$$

が知られている.

$p_{k-1}|_{S(x,k)} : S(x,k) \to S(x,k-1)$ のファイバーが arc であることに注意すると以下のことがわかる.

Corollary 2.4 ([4]). *If (X,d) is a proper* CAT(0) *space which is homeomorphic to $\mathbb{R}^2$, then the boundary ∂X of X is homeomorphic to $\mathbb{S}^1$.*

本論から外れるが, 以下の群の境界に関する結果は非常に興味深い.

Theorem 2.5 (Gromov). *Let G be a group and let (X_i, d_i) $(i = 0, 1)$ be a proper hyperbolic space such that G acts geometrically on X_i for $i = 0, 1$. Then ∂X_0 is homeomorphic to ∂X_1.*

Theorem 2.6 ([16]). *Let G be a group and let (X_i, d_i) be a proper* CAT(0) *space such that G acts geometrically on X_i for $i = 0, 1$. Then ∂X_0 and ∂X_1 are shape equivalent.*

Theorem 2.7 ([20]). *There exist a group G and a proper* CAT(0) *space $X(\alpha)$ $(0 < \alpha \leq \pi/2)$ such that*

(1) *G acts geometrically on $X(\alpha)$ $(0 < \alpha \leq \pi/2)$*
(2) *$\partial X(\alpha) \cong \partial X(\beta)$ if and only if $\alpha = \beta$.*

3. ASYMPTOTIC 次元

次の結果が本稿の主結果になる.

Theorem 3.1. *Let (X,d) be a proper* CAT(0) *space which is homeomorphic to $\mathbb{R}^2$. Then,* $\operatorname{asdim}(X,d) = 2$.

Example 3.2. $\mathbb{R}^2$ の中で各辺の長さが 1 の正 n 角形の 2-cell を考える．このような 2-cell を複数用意し（n の値は変化してよい），その複数の 2-cell を長さ 1 の各辺で同一視により張り合わせることで $\mathbb{R}^2$ に同相な 2-complex X をつくることができる．ここで 2-complex X の各頂点での近傍の単位円周が 2π 以上であるとき，X は CAT(0) 空間となる．このとき Theorem 3.1 より，$\operatorname{asdim}(X, d) = 2$ であることがわかる．ここで X に群が作用している必要はなく，実際群作用がないこのような空間 X はいくらでも存在する．

またごく簡単な応用として Theorem 3.1 から以下が得られる．

Corollary 3.3. *Let (W, S) be a Coxeter system. If the boundary $\partial\Sigma(W, S)$ of the Davis complex $\Sigma(W, S)$ is homeomorphic to $\mathbb{S}^1$, then* $\operatorname{asdim} W = 2$.

REFERENCES

[1] G. Bell and A. N. Dranishnikov, *Asymptotic dimension*, Topology Appl. 155 (2008), 1265–1296.

[2] B. H. Bowditch, *A course on geometric group theory*, MSJ Memoirs, 16. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2006.

[3] M. Bridson and A. Haefliger *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften , 319. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[4] N. Chinen and T. Hosaka, *Asymptotic dimension of proper CAT(0) spaces which are homeomorphic to the plane*, arXiv:0811.1325, to appear in Canad. Math. Bull.

[5] M. W. Davis, *The geometry and topology of Coxeter groups*, London Math. Soc. Monographs Series, 32. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.

[6] A. N. Dranishnikov, *Asymptotic topology*, Uspekhi Mat. Nauk 55 (2000), no. 6(336), 71–116; translation in Russian Math. Surveys 55 (2000), no. 6, 1085–1129.

[7] A. N. Dranishnikov, *Open problems in asymptotic dimension thorey*, preprint.

[8] A. N. Dranishnikov, S. C. Ferry and S. Weinberger, *Large Riemannian manifolds which are flexible*, Ann. of Math. (2) 157 (2003), 919–938.

[9] A. N. Dranishnikov and T. Januszkiewicz, *Every Coxeter group acts amenably on a compact space*, Topology Proc. 24 (1999), Spring, 135–141.

[10] A.N. Dranishnikov, J. Keesling and V.V. Uspenskij, *On the Higson corona of uniformly contractible spaces*, Topology 37 (1998), 791-803.

[11] R. Engelking, *General Topology*, Helderman Verlag, Berlin, 1989.

[12] R. Engelking, *Theory of Dimension Finite and Infinite*, Helderman Verlag, Berlin, 1995.

[13] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric group theory, vol. 2 London Math. Soc. Lecture Note Ser., 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[14] I. Kapovich, *Problem on boundaries of groups and Kleinian groups*, preprint.

[15] I. Kapovich and N. Benakli, *Boundaries of hyperbolic groups*, Combinatorial and geometric group theory , 39–93, Contemp. Math., 296, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[16] P. Ontaneda, *Cocompact CAT(0) spaces are almost geodesically complete*, Topology 44 (2005), no. 1, 47–62

[17] J. Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, vol. 31, American Mathematical Society, 2003.

[18] J. Roe, *Hyperbolic groups have finite asymptotic dimension*, Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), 2489–2490.

[19] E. L. Swenson, *A cut point theorem for CAT(0) groups*, J. Differential Geom. 53 (1999), 327–358.

[20] J. M. Wilson, *A CAT(0) group with uncountably many distinct boundaries*, J. Group Theory 8 (2005), 229–238.
[21] G. Yu, *The Novikov conjecture for groups with finite asymptotic dimension*, Ann. of Math. (2) 147 (1998), no. 2, 325–355.

OKINAWA NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY, NAGO-SHI OKINAWA 905-2192, JAPAN
E-mail address: chinen@okinawa-ct.ac.jp

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF EDUCATION, UTSUNOMIYA UNIVERSITY, UTSUNOMIYA, 321-8505, JAPAN
E-mail address: hosaka@cc.utsunomiya-u.ac.jp